MAT 204 ANALİTİK GEOMETRİ II FİNAL SORULARI (25.05.2018)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) $A\,x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ genel konik denklemine dönme uygulayınız. Dönmeden sonra elde etmiş olduğunuz denklem $A'\,x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$ olsun. Elde edilen konik denklemi ile esas konik denklemi arasındaki katsayılar arasındaki

$$4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$$

bağıntısının sağlanıp-sağlanmadığını araştırınız$(\mathbf{20}\boldsymbol{P}.)$

2.) $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$ koniğine uygun bir öteleme ve dönme uygulayarak merkezil hale getiriniz ve grafiğini çiziniz$(\mathbf{20}\boldsymbol{P}.)$

3.) $d_1 \cdots \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1} = \lambda$ ve $d_2 \cdots \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{-2} = t$ doğrularının birbirlerine göre durumlarını inceleyiniz. Aykırı iseler ortak dikme doğrusunun denklemini bulunuz$(\mathbf{20}\boldsymbol{P}.)$

4.) $5x^2 + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$ koniğinin

a) Merkezini **b)** x-eksenine paralel çapını **c)** Eksenlerini **d)** Asimptotlarını araştırınız$(\mathbf{20}\boldsymbol{P}.)$

5.) a) $A(1,1), B(1,0), C(0,1), D(0,0)$ ve $E(2,3)$ noktalarından geçen koniğin denklemini yazınız$(\mathbf{10}\boldsymbol{P}.)$

b) $xy - 1 = 0$ koniğine $P(1,1)$ noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz$(\mathbf{10}\boldsymbol{P}.)$

NOT: Sorular eşit puanlı olup, süre 90 dakikadır. Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

C-1) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ genel konik denklemine

$$R_0 \cdots \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

koordinat eksenlerinin döndürülmesi işlemini uygulayalım:

$$A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+B(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+C(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2$$
$$+D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)}_{A'}x'^2+\underbrace{(-2A\sin\alpha.\cos\alpha+B\cos^2\alpha-B\sin^2\alpha}_{B'}$$
$$\underbrace{+2C\cos\alpha\sin\alpha)}_{B'}x'y'+\overbrace{(A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha)}^{C'}y'^2$$
$$+\underbrace{(D\cos\alpha-E\sin\alpha)}_{D'}x'+\underbrace{(-D\sin\alpha+E\cos\alpha)}_{E'}y'+F=0$$

$$\Rightarrow \boxed{A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0}$$

bulunur.

$$4A'C'-B'^2=4(A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)(A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha)$$
$$-(-2A\sin\alpha.\cos\alpha+B\cos^2\alpha-B\sin^2\alpha+2C\cos\alpha\sin\alpha)^2$$
$$\Rightarrow 4A'C'-B'^2=4A^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha-4AB\sin\alpha\cos^3\alpha+4AC\cos^4\alpha+4AB\sin^3\alpha\cos\alpha$$
$$-4B^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+4BC\sin\alpha\cos^3\alpha+4AC\sin^4\alpha-4BC\sin^3\alpha\cos\alpha$$
$$+4C^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4A^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-B^2\cos^4\alpha-B^2\sin^4\alpha-4C^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$+4AB\sin\alpha\cos^3\alpha-4AB\sin^3\alpha\cos\alpha+8AC\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2B^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$-4BC\cos^3\alpha\sin\alpha+4BC\sin^3\alpha\cos\alpha$$
$$\Rightarrow 4A'C'-B'^2=4AC\cos^4\alpha-2B^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+4AC\sin^4\alpha$$
$$-B^2\cos^4\alpha-B^2\sin^4\alpha+8AC\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$\Rightarrow 4A'C'-B'^2=\cos^4\alpha(4AC-B^2)+\sin^4\alpha(4AC-B^2)+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(4AC-B^2)$$
$$\Rightarrow 4A'C'-B'^2=(4AC-B^2)(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$$
$$\Rightarrow 4A'C'-B'^2=(4AC-B^2)\underbrace{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2}_{1}$$

$$\Rightarrow 4A'C'-B'^2=4AC-B^2$$

elde edilir.

C-2) $\Phi(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_x(x,y) = 2x+2y+8 \\ \Phi_y(x,y) = 2x-2y+4\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y=-4 \\ x-y=-2\end{array}\right\} \Rightarrow \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ olduğundan}$$

simetri merkezi vardır. Simetri merkezi $O'(h,k)$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_x\big|_{O'} = \Phi_x(h,k) = 2h+2k+8 \\ \Phi_y\big|_{O'} = \Phi_y(h,k) = 2h-2k+4\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l}\Phi_x\big|_{O'} = 0 \Rightarrow 2h+2k=-8 \Rightarrow h+k=-4 \\ \Phi_y\big|_{O'} = 0 \Rightarrow 2h-2k=-4 \Rightarrow \underline{+\ h-k=-2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2h=-6 \Rightarrow h=-3.\end{array}$$

$h=-3$ için $k=-4+3=-1$ bulunur.

Buna göre $O'(h,k) = O'(-3,-1)$ dir.

$\Phi(-3,-1) = (-3)^2 + (-1)(-3).2 - (-1)^2 + 8(-3) + 4(-1) - 8 = -22 \Rightarrow F' = -22.$

$$\left.\begin{array}{l}x = x'-3 \\ y = y'-1\end{array}\right\} \text{ ötelemesi uygulanırsa}$$

$(x'-3)^2 + 2(x'-3)(y'-1) - (y'-1)^2 + 8(x'-3) + 4(y'-1) - 8 = 0$ dan

$x'^2 + 2x'y' - y'^2 - 22 = 0$

elde edilir. Burada $A=1$, $B=2$, $C=-1$ olup

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{2}{1-(-1)} = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} \text{ yani } \alpha = 22{,}5^\circ.$$

$\alpha = 22{,}5^\circ$ lik bir dönme uygularsak verilen konik denklemini merkezil hale getiririz.

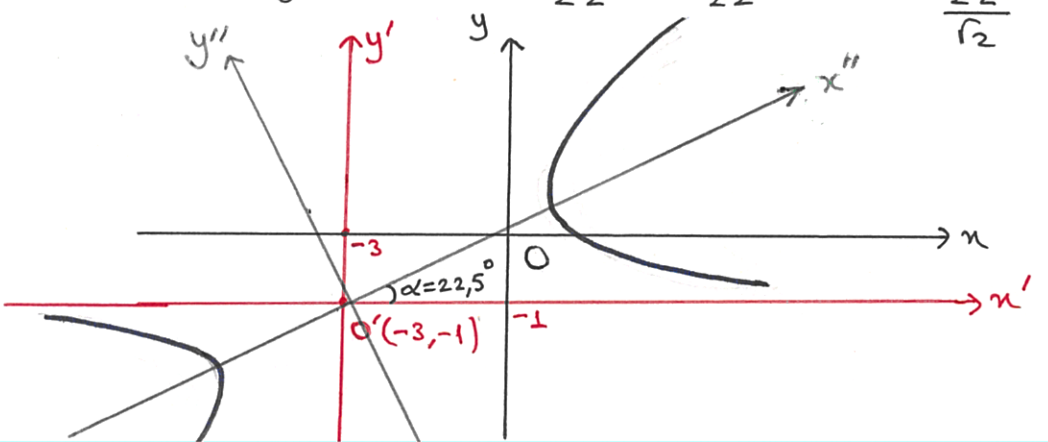
$A'+C' = A+C \Rightarrow A'+C' = 1-1 = 0$ ve

$A'-C' = \sqrt{(A-C)^2+B^2} = \sqrt{(1+1)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ bağıntılarından

$$\begin{array}{l} \quad A'+C' = 0 \\ \underline{+\ A'-C' = 2\sqrt{2}} \\ \quad 2A' = 2\sqrt{2} \end{array} \Rightarrow A' = \sqrt{2},\quad A'+C'=0 \text{ dan } A'=-C' \Rightarrow C' = -\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

Buna göre, öteleme ve dönme sonrasında oluşan konik denklemi

$$\sqrt{2}\,x''^2 - \sqrt{2}\,y''^2 - 22 = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}\,x''^2}{22} - \frac{\sqrt{2}\,y''^2}{22} = 1 \Rightarrow \frac{x''^2}{\frac{22}{\sqrt{2}}} - \frac{y''^2}{\frac{22}{\sqrt{2}}} = 1$$ ikizkenar hiperboldür.



C-3) İlk olarak, $A\in d_1$ ve $B\in d_2$ noktalarını bulalım;

$\lambda=0$ için $A=(1,-2,3)$,

$t=0$ için $B=(-2,3,4)$ bulunur. Buna göre, $\vec{AB}=(-3,5,1)$.

Ayrıca, $\vec{u_1}=(2,2,-1)$, $\vec{u_2}=(2,3,-2)$ dir. Bu durumda, $\det(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{AB})=0$ olup olmadığına bakmalıyız.

$$\det(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{AB})=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=15\neq 0$$

old. dan d_1 ve d_2 doğruları aykırıdırlar. Böylece her ikisine dik olan bir d_3 doğrusu bulunabilir. d_3 doğrusunun doğrultman vektörüne $\vec{u_3}$ denilirse,

$$\vec{u_3}=\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}=\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-\vec{e_1}+2\vec{e_2}+2\vec{e_3}=(-1,2,2).$$

d_1 ile d_3 doğrularının belirttiği düzlemi P_1 ile gösterelim. P_1'in denklemini bulalım: $A\in d_1$ noktasını $A=(1,-2,3)$ olarak bulmuştuk. $\vec{n_1}$ normali bulunursa, bir noktadan geçen ve normali $\vec{n_1}$ olan P_1 düzleminin denklemini bulalım:

$$\vec{n_1}=\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=6\vec{e_1}-3\vec{e_2}+6\vec{e_3}$$

olur. O halde,

$P_1 \ldots ax+by+cz+d=0$ olmak üzere, $P_1 \ldots 6x-3y+6z+d=0$ dır. $A\in P$ olduğundan

$$6.1-3(-2)+6.3+d=0 \Rightarrow d=-30$$ bulunur. Böylece,

$$\boxed{P_1 \;\ldots\; 6x-3y+6z-30=0}$$

dır.

— Şimdi de d_2 ile d_3 doğrularının belirttiği düzlemi P_2 ile gösterip, P_2 nin denklemini elde etmeye çalışalım. Bunun için P_2'nin normal vektörünü bulmalıyız.

$$\vec{n_2}=\vec{u_2}\wedge\vec{u_3}=\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=10\vec{e_1}-2\vec{e_2}+7\vec{e_3}.$$

$P_2 \ldots\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + d' = 0$ denirse,

$P_2 \ldots\ 10x - 2y + 7z + d' = 0$ olur. $B = (-2, 3, 4) \in P$ old. dan,

$$10(-2) - 2.(3) + 7.4 + d' = 0 \Rightarrow -20 - 6 + 27 + d' = 0 \Rightarrow d' = -2$$

elde edilir. O halde,

$$\boxed{P_2 \ldots\ 10x - 2y + 7z - 2 = 0}$$

bulunur. Buradan,

$$d_3 \ldots (6x - 3y + 6z - 30 = 0,\ 10x - 2y + 7z - 2 = 0)$$

elde edilir. Şimdi d_3 doğrusunun denklemini bulalım:

$z = 0$ denirse

$$6x - 3y - 30 = 0$$

$$10x - 2y - 2 = 0$$

lineer denklem sistemi bulunur. Bu sistem çözülürse,

$x = -3$ ve $y = -16$ bulunur. Buna göre $C = (-3, -16, 0) \in d_3$ olur. $\vec{u_3} = (-1, 2, 2)$ olduğundan,

$$\boxed{d_3 \ldots \frac{x+3}{-1} = \frac{y+16}{2} = \frac{z}{2} = k}$$

elde edilir.

C-4) $5x^2+5y^2-4x+4y-4=0$ koniğinin

a) Merkezini b) x-eksenine paralel çapını c) Eksenlerini d) Asimptotlarını araştıralım.

a) $\Phi_x(x,y)=10x-4$

$\Phi_y(x,y)=10y+4$ olmak üzere $M=(x_0,y_0)$ merkez noktasını göstersin. Bu durumda,

$$\Phi_x\big|_M = 10x_0-4=0 \Rightarrow x_0=\frac{2}{5},$$

$$\Phi_y\big|_M = 10y_0+4=0 \Rightarrow y_0=-\frac{2}{5}$$ olur. Buna göre,

$M=\left(\frac{2}{5},-\frac{2}{5}\right)$ olarak elde edilir.

b) Eşlenik doğrultular arasındaki bağıntı $m'=-\dfrac{2A+Bm}{B+2Cm}$ olmak üzere, verilen koniğin x-eksenine paralel çapını araştırmak demek $m'=0$ olması demektir. Buradan,

$$m=-\frac{2A}{B}=-\frac{10}{0}=-\infty$$ bulunur.

Bunu çap denkleminde yerine yazalım!

$$\Phi_x+m\Phi_y=0 \Rightarrow 10x-4-\frac{10}{0}(10y+4)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-\frac{2}{5}}$$ bulunur.

c) Asal doğrultular arasındaki bağıntının $Bm^2+2(A-C)m-B=0$ olduğunu biliyoruz. Verilen konik denkleminde $B=0$ olduğundan $(A-C)m=0$ elde edilir. $A=C$ olduğundan her m değeri için sağlanır. Dolayısıyla sonsuz tane eksen vardır.

d) Asimptotik doğrultular arasındaki bağıntının $Cm^2+Bm+A=0$ olduğunu biliyoruz. Bu ifade de $C=5$, $A=5$ ve $B=0$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$5m^2+5=0 \Rightarrow m^2=-1 \quad (m\notin\mathbb{R})$$ olur. Böylece verilen koniğin asimptotu yoktur.

C–5) a) Genel konik denklemimiz $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ şeklinde olsun. Verilen noktalar konik üzerinde olduğundan denklemi sağlarlar. Buna göre,

$$\left.\begin{aligned} A+B+C+D+E+F&=0\\ A+D+F&=0\\ C+E+F&=0\\ F&=0\\ 4A+6B+9C+2D+3E+F&=0\end{aligned}\right\}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Şimdi bu lineer denklem sistemini çözelim:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&1&1&1&0\\ 1&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 4&6&9&2&3&1&0\end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&3&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ $A=3E$, $B=0$, $C=-E$, $D=-3E$, $F=0$ bulunur. Bunları konik denkleminde yerlerine yazarsak

$3Ex^2-y^2-3Ex+Ey=0$ veya $E=1$ için

$3x^2-y^2-3x+y=0$ konik denklemi elde edilir.

b) $P(1,1)$ noktasının $\Phi(x,y)=xy-1=0$ koniğine göre durumuna bakalım: $\Phi(1,1)=1.1-1=0$ olup P noktası koniğin üzerindedir. $P(1,1)$ noktasından geçen doğru denklemi $y-1=m(x-1)$ dir.

Denklem ile koniği ortak çözelim

$x[m(x-1)+1]-1=0 \Rightarrow mx^2+(-m+1)x-1=0$ dır.

Teğet olan denklemi aradığımız için $\Delta=b^2-4ac=0$ olmalıdır.

$\Delta=(-m+1)^2-4\cdot m\cdot(-1)=0 \Rightarrow m^2-2m+1+4m=0 \Rightarrow m^2+2m+1=0$

$\Rightarrow (m+1)^2=0 \Rightarrow m=-1.$

$y-1=m(x-1)$ den $y-1=1-x \Rightarrow \boxed{y=-x+2}$ bulunur.